BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№3 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2010*

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА КОНЕЧНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ К РЕШЕНИЮ ДВУМЕРНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПОЛОСЕ

Э.А.ГАСЫМОВ

Бакинский Государственный Университет

riy_met@mail.ru

В настоящей работе, применяя комбинированный метод Фурье и метод конечного интегрального преобразования к решению рассматриваемой смешанной задачи, получается аналитическое представление решения при априорных предположениях его существования. Накладывая определенные ограничения на данные задачи, показывается, что полученное аналитическое представление на самом деле является решением рассматриваемой задачи.

Постановка задачи. Найти решение уравнения[1]

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+F(x,y,t),\ -\infty<x<\infty,\ \ 0<y<h,\ \ t>0, \tag{1}$$

при начальном условии

$$u(x,y,t)\big|_{t=+0}=f(x,y),\ -\infty<x<\infty,\ \ 0<y<h, \tag{2}$$

и при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{y=(j-1)h}=\psi_j(x,t),\ \ -\infty<x<\infty,\ \ t>0,\ \ j=1,2, \tag{3}$$

$$u(x,y,t),\ \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x}\to 0 \text{ при } r=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty,\ -\infty<x<\infty,\ 0\le y\le h,\ t\ge 0, \tag{4}$$

где a и b - некоторые постоянные числа, $u\equiv u(x,y,t)$ - искомое решение, а остальные известные функции, h - некоторое положительное число.

1^0. Пусть $b\neq 0$ и $\left|\arg b\right|<\frac{\pi}{4}-\alpha$ (α - некоторое положительное число, удовлетворяющее неравенству $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$).

[1] Ради простаты записи здесь мы ограничимся рассмотрением модельной задачи (1)-(4). По существу, такого рода задача решена для более общих параболических систем с более общими краевыми условиями.

2^0. Пусть функции $F(x,y,t,)$, $f(x,y)$, $\psi_1(x,t)$, $\psi_2(x,t)$ при $0 \le y \le h$, $t \ge 0$ имеют преобразование Фурье по $x \in (-\infty,\infty)$ и функции

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta} F(\theta,y,t)d\theta,\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta} f(\theta,y)d\theta,\ \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}\psi_j(\theta,t)d\theta,\quad i \equiv \sqrt{-1},\quad j=1,2,$$

непрерывны при $-\infty < \xi < \infty$, $0 \le y \le h$, $t \ge 0$.

Пусть задача (1)-(4) имеет решение. Тогда, применяя интегральное преобразование Фурье к (1), имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t}dx = a^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi x}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2}dx + b^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi}\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2}dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi}F(x,y,t)\,dx.$$

Следовательно

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}u(\theta,y,t)d\theta = -a^2\xi^2\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}u(\theta,y,t)d\theta + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}u(\theta,y,t)d\theta + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}F(\theta,y,t)d\theta. \quad (5)$$

Умножая обе части (5) на $e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)t}$ и интегрируя по t от 0 до t, имеем:

$$\int_0^t e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)\tau}\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}u(\theta,y,\tau)d\theta\right)d\tau = \left(-a^2\xi^2 + b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\times$$

$$\times\int_0^t e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}u(\theta,y,\tau)d\theta + \int_0^t e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}F(\theta,y,\tau)d\theta,$$

где λ - комплексный параметр.

Следовательно, пользуясь начальным условием (2), получаем:

$$\left(b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \lambda^2\right)\int_0^t e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}u(\theta,y,\tau)d\theta = e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)t}\times$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}u(\theta,y,t)d\theta + \mathrm{F}(\xi,y,t,\lambda),\quad 0<y<h,\quad t>0,\quad -\infty<\xi<\infty, \qquad (6)$$

где

$$\mathrm{F}(\xi,y,t,\lambda) \equiv -\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}f(\theta,y)d\theta - \int_0^t e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}F(\theta,y,\tau)d\theta.$$

Из (3) имеем:

$$\left.\frac{\partial}{\partial y}\int_0^t e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}u(\theta,y,\tau)d\theta\right|_{y=(j-1)h} = \tilde{\psi}_j(\xi,t,\lambda),\ j=1,2, \qquad (7)$$

где

$$\tilde{\psi}_j(\xi,t,\lambda) \equiv \int_0^t e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}\psi_j(\theta,\tau)d\theta,\quad j=1,2.$$

Рассмотрим параметрическую задачу

$$\left(b^2\frac{d^2}{dy^2}-\lambda^2\right)z(y,\lambda)=Q(y),\quad 0<y<h, \tag{8}$$

$$\left.\frac{dz}{dy}\right|_{y=(j-1)h}=\gamma_j\ ,\qquad j=1,2, \tag{9}$$

где γ_j - произвольные числа, $Q(y)\in C([0,h])$. Пусть

$$\Delta(\lambda/b)=e^{-2h\lambda/b}-1. \tag{10}$$

Решением уравнения (10) будет

$$\lambda_k=ik\,\pi\,b/h,\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots\ . \tag{11}$$

При $\Delta(\lambda/b)\neq 0$ задача (8),(9) имеет единственное решение и оно представляется формулой [1-5]:

$$z(y,\lambda)=\delta(y,\lambda/b;\gamma_1,\gamma_2)+\int_0^h G(y,\eta,\lambda/b)Q(\eta)d\eta,\quad 0\le y\le h, \tag{12}$$

где

$$\delta(y,\lambda/b;\gamma_1,\gamma_2)=\frac{b}{\lambda\Delta(\lambda/b)}\left[q_{11}(y,\lambda/b)\gamma_1+q_{12}(y,\lambda/b)\gamma_2\right]\ ,$$

$$q_{11}(y,\lambda/b)=e^{-y\lambda/b}+e^{-(2h-y)\lambda/b};\ \ q_{12}(y,\lambda/b)=-e^{-(h+y)\lambda/b}-e^{-(h-y)\lambda/b};$$

$$G(y,\eta,\lambda/b)=P(y,\eta,\lambda/b)+G_1(y,\eta,\lambda/b);$$

$$P(y,\eta,\lambda/b)=-\frac{1}{2b\lambda}e^{-|y-\eta|\lambda/b};\ \ G_1(y,\eta,\lambda/b)=\frac{\Delta_1(y,\eta,\lambda/b)}{2b\lambda\Delta(\lambda/b)};$$

$$\Delta_1(y,\eta,\lambda/b)=e^{-(y+\eta)\lambda/b}+e^{-(2h-y+\eta)\lambda/b}+e^{-(2h+y-\eta)\lambda/b}+e^{-(2h-y-\eta)\lambda/b}. \tag{12_1}$$

При $\Delta(\lambda/b)\neq 0$, в силу единственности решения задачи (8),(9), согласно формуле (12), из (6),(7) имеем:

$$\int_0^t e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)\tau}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi\theta}u(\theta,y,\tau)d\theta=\delta\left(y,\lambda/b;\tilde\psi_1(\xi,t,\lambda),\tilde\psi_2(\xi,t,\lambda)\right)+\int_0^h G(y,\eta,\lambda/b)\times$$

$$\times\left[e^{(-\lambda^2+a^2\xi^2)t}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi\theta}u(\theta,\eta,t)d\theta+\text{☞}(\xi,\eta,t,\lambda)\right]d\eta,\ -\infty<\xi<\infty,\ 0\le y\le h,\ t\ge 0. \tag{13}$$

Умножая обе части (13) на $\lambda e^{(\lambda^2-a^2\xi^2)t}$ и интегрируя по λ, имеем:

$$\int_L\lambda d\lambda\int_0^t e^{(\lambda^2-a^2\xi^2)(t-\tau)}d\tau\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi\theta}u(\theta,y,\tau)d\theta-$$

$$-\int_L\lambda d\lambda\int_0^h G(y,\eta,\lambda/b)d\eta\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\xi\theta}u(\theta,\eta,t)d\theta=\pi\sqrt{-1}\left[J_1(\xi,y,t)+J_2(\xi,y,t)\right], \tag{14}$$

где

$$J_1(\xi,y,t)\equiv\frac{1}{\pi\sqrt{-1}}\int_L\lambda\delta\left(y,\lambda/b;\tilde\psi_3(\xi,t,\lambda),\tilde\psi_4(\xi,t,\lambda)\right)d\lambda,$$

$$J_2(\xi, y, t) \equiv \frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_L \lambda e^{(\lambda^2 - a^2\xi^2)t} d\lambda \int_0^h G(y, \eta, \lambda / b) \text{☞}(\xi, \eta, t, \lambda) d\eta, \qquad (14_1)$$

$$\tilde{\psi}_{2+l}(\xi, t, \lambda) \equiv \int_0^t e^{(\lambda^2 - a^2\xi^2)(t-\tau)} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta} \psi_l(\theta, \tau) d\theta, \qquad l = 1,2,$$

L - некоторый разомкнутый контур в $R_\alpha \equiv \left\{ \lambda : |\lambda| \geq R, |\arg\lambda| \leq \frac{\pi}{4} + \alpha \right\}$ (R - достаточно большое положительное число), достаточно далекая часть которого совпадает с продолжениями лучей $\arg\lambda = \pm(\pi/4 + \alpha)$, причем интеграл по L понимается в смысле главного значения.

Согласно формулам [5-8] , [10-14]:

$$\int_L \lambda d\lambda \int_0^t e^{\lambda^2(t-\tau)} \varphi(\tau) d\tau = \left(\frac{\pi}{2} - 2\alpha \right) \sqrt{-1} \varphi(t), \qquad t > 0,$$

$$\int_L \lambda d\lambda \int_0^h G(y, \eta, \lambda / b) \psi(\eta) d\eta = -\left(\frac{\pi}{2} + 2\alpha \right) \sqrt{-1}\, \psi(y), \quad 0 < y < h, \qquad (15)$$

из (14) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta} u(\theta, y, t) d\theta = J_1(\xi, y, t) + J_2(\xi, y, t), \quad -\infty < \xi < \infty, 0 < y < h, \, t > 0. \qquad (16)$$

Пользуясь обратным преобразованием Фурье

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} d\xi \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta} f(\theta) d\theta = f(x), \qquad (17)$$

из (16) получаем:

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \sum_{s=1}^{2} J_s(\xi, y, t) d\xi, \quad -\infty < x < \infty, \; 0 < y < h, \; t > 0. \qquad (18)$$

Пусть C_k - окружность с центром в начале координат и с радиусом $r_k = \frac{|b|}{h}\pi\left(k + \frac{1}{2}\right)$ $(k = 1,2,...)$ в λ плоскости, тогда, согласно [1-5], из (14_1) имеем:

$$J_1(\xi, y, t) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_k} \lambda \delta(y, \lambda / b; \tilde{\psi}_3(\xi, t, \lambda), \tilde{\psi}_4(\xi, t, \lambda)) d\lambda,$$

$$(14_2)$$

$$J_2(\xi, y, t) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{-1}} \int_{C_k} \lambda e^{(\lambda^2 - a^2\xi^2)t} d\lambda \int_0^h G(y, \eta, \lambda / b) \text{☞}(\xi, \eta, t, \lambda) d\eta.$$

Принимая во внимание (11), из (10) имеем:

$$\Delta'(\lambda_k / b) = -2h / b, \; k = 0, \pm 1, \pm 2, ... \; . \qquad (19)$$

Из (12_1), (14_2), (19), согласно теореме Коши [4], получаем:

$$J_1(\xi, y, t) = -\frac{b^2}{2h}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\left[q_{11}(y, \lambda_k / b)\widetilde{\psi}_3(\xi, t, \lambda_k) + q_{12}(y, \lambda_k / b)\widetilde{\psi}_4(\xi, t, \lambda_k)\right],$$

$$J_2(\xi, y, t) = -\frac{1}{4h}\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\left(\lambda_k^2 - a^2\xi^2\right)t}\int_0^h \Delta_1(y, \eta, \lambda_k / b)\text{☞}(\xi, \eta, t, \lambda_k)d\eta . \qquad (14_3)$$

Учитывая (11) в (12_1), имеем:

$$q_{11}(y, \lambda_k / b) = 2\cos\frac{\pi k}{h}y,$$

$$q_{12}(y, \lambda_k / b) = 2(-1)^{k+1}\cos\frac{k\pi}{h}y, \quad \Delta_1(y, \eta, \lambda_k / b) = 4\cos\frac{k\pi y}{h}\cos\frac{k\pi\eta}{h}. \qquad (20)$$

Введем обозначения:

$$\Gamma(y, \eta, t) \equiv \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} e^{-(b\pi k)^2 t / h^2}\cos\frac{k\pi y}{h}\cos\frac{k\pi\eta}{h}. \qquad (21)$$

Принимая во внимание (20), (21), из (14_3) получаем:

$$J_1(\xi, y, t) = \frac{2b^2}{h}\int_0^t e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}\left[\Gamma(y, h, t-\tau)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}\psi_2(\theta, \tau)d\theta - \right.$$

$$\left. - \Gamma(y, 0, t-\tau)\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}\psi_1(\theta, \tau)d\theta\right]d\tau,$$

$$J_2(\xi, y, t) = \frac{2}{h}\int_0^h e^{-a^2\xi^2 t}\Gamma(y, \eta, t)d\eta\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}f(\theta, \eta)d\theta +$$

$$+ \frac{2}{h}\int_0^t e^{-a^2\xi^2(t-\tau)}d\tau\int_0^h \Gamma(y, \eta, t-\tau)d\eta\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi\theta}F(\theta, \eta, \tau)d\theta. \qquad (14_4)$$

Таким образом, нами установлена следующая

Теорема 1. Пусть выполняются ограничения 1^0, 2^0. Тогда, если задача (1)-(4) имеет решение, то: 1) оно единственное; 2) это решение представляется формулой (18), где $J_s(\xi, y, t)$ из (14_4) .

Пусть

$$\psi_j(x, t) = \delta(x)\varphi_j(t), \; j = 1{,}2 , \quad F(x, y, t) = \delta(x)F_1(y, t), f(x, y) = \delta(x)f_1(y), \qquad (22)$$

где $\delta(x)$ - дельта функция Дирака, $F_1(y, t), f_1(y), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ - некоторые известные функции.

3^0. Пусть функции $F_1(y, t), f_1(y), \varphi_1(t), \varphi_2(t)$ непрерывны при $0 \le y \le h, \;\; t \ge 0$.

4^0. Пусть $a \ne 0$ и $|\arg a| < \pi / 4$.

При ограничениях 1^0, 2^0, (22), 3^0,4^0 , пользуясь равенством

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\xi^2 t}e^{-ix\xi}d\xi = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2 t}}, \qquad (23)$$

из (18) имеем:

$$u(x,y,t)=\sum_{s=1}^{3}u_s(x,y,t),\ -\infty<x<\infty,\ 0<y<h,\ t>0, \tag{24}$$

где

$$u_1(x,y,t)=\frac{b^2}{ah\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}\left[\Gamma(y,h,t-\tau)\varphi_2(\tau)-\Gamma(y,0,t-\tau)\varphi_1(\tau)\right]d\tau,$$

$$u_2(x,y,t)=\frac{1}{ah\sqrt{t\pi}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}\int_0^h\Gamma(y,\eta,t)f_1(\eta)d\eta,$$

$$u_3(x,y,t)=\frac{1}{ah\sqrt{\pi}}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{t-\tau}}e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}}d\tau\int_0^h\Gamma(y,\eta,t-\tau)F_1(\eta,\tau)d\eta. \tag{24_1}$$

При вышеуказанных ограничениях теорема 1 принимает следующий вид:

Теорема 2. При ограничениях 1^0, 2^0, (22), 3^0,4^0, если задача (1)-(4) имеет решение, то: 1) оно единственное; 2) это решение представляется формулой (24).

5^0. Пусть

$$f_1\in C^2([0,h]);\ \varphi_j(t)\in C^1([0,\infty]),\ j=1,2;\ \frac{\partial^2F_1(y,t)}{\partial y^2},\ \frac{\partial F_1(y,t)}{\partial t}\in C([0,h]\times[0,\infty])$$

и выполняются условия согласования $\left.\frac{df_1}{dy}\right|_{y=(j-1)h}=\varphi_j(0),\quad j=1,2$.

Имеет место

Теорема 3. При ограничениях 1^0, 2^0, (22), 4^0, 5^0 задача (1)-(4) имеет единственное решение и оно представляется формулой (24).

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что функция $u(x,y,t)$, определяемая формулой (24), удовлетворяет равенствам:

$$\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}u(x,y,t)\,dx=f_1(y),\ -\infty<\xi<\infty,\ 0<y<h; \tag{25}$$

$$\lim_{y\to(j-1)h-(-1)^j0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}\frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y}dx=\varphi_j(t),\ j=1,2,\ -\infty<\xi<\infty,\ t>0; \tag{26}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}\left(\frac{\partial}{\partial t}-a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}-b^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u(x,y,t)\,dx=F_1(y,t),\ -\infty<\xi<\infty,\ 0<y<h,\ t>0. \tag{27}$$

Из (24_1) имеем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}u_1(x,y,t)dx=V_1(y,t)+V_2(\xi,y,t), \tag{28}$$

где

$$V_1(y,t)=\beta_1(y)\varphi_1(t)+\beta_2(y)\varphi_2(t),$$
$$\beta_j(y)\equiv(-1)^j\frac{2h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi[(j-1)h-y]}{h},\ j=1,2,$$
$$V_2(\xi,y,t)=\frac{b^2}{h}\int_0^t[\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau)]\,e^{-\xi^2a^2(t-\tau)}d\tau-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2h}{\pi^2k^2}\cos\frac{k\pi y}{h}\times$$
$$\times\left\{[(-1)^k\varphi_2(0)-\varphi_1(0)]e^{-\xi^2a^2t}e^{-(\pi bk)^2t/h^2}+\int_0^t\{[(-1)^k\varphi_2'(\tau)-\varphi_1'(\tau)]+\right. \tag{28$_1$}$$
$$\left.+\xi^2a^2[(-1)^k\varphi_2(\tau)-\varphi_1(\tau)]\}e^{-\xi^2a^2(t-\tau)}e^{-(\pi bk)^2(t-\tau)/h^2}d\tau\right\};$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}u_2(x,y,t)dx=\frac{2}{h}e^{-\xi^2a^2t}\left\{\frac{1}{2}\int_0^h f_1(\eta)d\eta-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h}{k\pi}e^{-(\pi bk)^2t/h^2}\cos\frac{k\pi y}{h}\int_0^h f_1'(\eta)\sin\frac{k\pi\eta}{h}d\eta\right\} \tag{29}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}u_3(x,y,t)dx=\frac{1}{h}\int_0^t e^{-\xi^2a^2(t-\tau)}d\tau\int_0^h F_1(\eta,\tau)d\eta+\frac{2h}{\pi^2b^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\cos\frac{k\pi y}{h}\times$$
$$\times\left\{\int_0^h\cos\frac{k\pi\eta}{h}F_1(\eta,t)d\eta-e^{-\xi^2a^2t}e^{-(\pi bk)^2t/h^2}\int_0^h\cos\frac{k\pi\eta}{h}F_1(\eta,0)d\eta-\right.$$
$$-\int_0^t\left[\xi^2a^2\int_0^h\cos\frac{k\pi\eta}{h}F_1(\eta,\tau)d\eta+\int_0^h\cos\frac{k\pi\eta}{h}\frac{\partial}{\partial\tau}F_1(\eta,\tau)d\eta\right]\times$$
$$\left.\times e^{-\xi^2a^2(t-\tau)}e^{-(\pi bk)^2(t-\tau)/h^2}d\tau\right\}. \tag{30}$$

Из (28) – (30) следует, что

$$\begin{gathered}\lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}u_s(x,y,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}u_s(x,y,0)dx=0\quad s=1,3;\\ \lim_{t\to+0}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}u_2(x,y,t)dx=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}u_2(x,y,0)dx=g(y),\ -\infty<\xi<\infty,\ 0\le y\le h,\end{gathered} \tag{31}$$

где

$$g(y)\equiv\frac{2}{h}\left\{\frac{1}{2}\int_0^h f_1(\eta)d\eta-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h}{k\pi}\cos\frac{k\pi y}{h}\int_0^h f_1'(\eta)\sin\frac{k\pi\eta}{h}d\eta\right\}.$$

Следовательно,

$$g(y)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi y}{h},\quad 0<y<h,\ \text{где}\ \ a_n=\frac{2}{h}\int_0^h f_1(\eta)\cos\frac{n\pi\eta}{h}d\eta,\ n=0,1,\dots\ .$$

Отсюда, пользуясь формулой разложения функций в ряд Фурье (см. [9], с.445), получаем:

$$g(y)=f_1(y),\qquad 0<y<h\ . \tag{32}$$

Следовательно, принимая во внимание (31), (32), из (24) получаем справедливость формулы (25). Пользуясь тождеством $\dfrac{1}{k^2}=\dfrac{1}{k}-\dfrac{1}{k+1}+\dfrac{1}{k^2(k+1)}$, из

(28_1) имеем:

$$\beta_j(y)=\beta_{j1}(y)+\beta_{j2}(y),\ \ 0<y<h,\ j=1,2, \tag{33}$$

где

$$\beta_{j1}(y)=(-1)^j\frac{2h}{\pi^2}\left\{(-1)^{j-1}2\left[(-1)^j+\cos\frac{\pi y}{h}\right]\ln\left[2\sin\left(\frac{\pi y}{2h}+(j-1)\frac{\pi}{2}\right)\right]+1+\right.$$

$$\left.+\left[(-1)^{j-1}\frac{\pi y}{2h}-(2-j)\frac{\pi}{2}\right]\sin\frac{\pi y}{h}\right\};$$

$$\beta_{j2}(y)=(-1)^j\frac{2h}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{(j-1)k}}{k^2(k+1)}\cos\frac{k\pi y}{h},\ \ j=1,2\ .$$

Следовательно, пользуясь (33), имеем:

$$\beta_j'(+0)=2-j\ ,\quad \beta_j'(h-0)=j-1,\quad j=1,2\ . \tag{34}$$

Из (28_1) следует, что

$$\frac{\partial}{\partial y}V_2(\xi,y,t)\Big|_{y=(j-1)h}=0,\quad j=1,2;\quad -\infty<\xi<\infty\ ,\quad t>0. \tag{35}$$

Учитывая (28_1), (34) и (35) в (28), получаем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}\frac{\partial}{\partial y}u_1(x,y,t)dx\Big|_{y=(j-1)h+(-1)^{j-1}0}=\varphi_j(t),\ j=1,2,\ -\infty<\xi<\infty,t>0. \tag{36}$$

Из (29) ,(30) следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-i\xi x}\frac{\partial}{\partial y}u_s(x,y,t)dx\Big|_{y=(j-1)h}=0,\ s=2,3,\ \ j=1,2\ ,\ -\infty<\xi<\infty,t>0. \tag{37}$$

Учитывая (36) и (37) в (24), получаем справедливость (26). Аналогично устанавливается справедливость (27). Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cauchy A.L. Me’moire sur l’application de calcul des residus a’la solution des problems de physiqul mathematique// Paris, 1827, v.7, p.1-56.
2. Tamarkin J. Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of arbitrary functions in series of fundamental functions// Math. Z., 1928, 27, p.1-54.
3. Расулов М.Л. Применения метода контурного интеграла. М.: Наука, 1975, 255 с.
4. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теорий функций комплексного переменного. М.: Гостехиздат, 1951, 347 с.
5. Гасымов Э.А. Интегральные преобразования и параболические потенциалы; применение их к решению некоторых смешанных задач. Канд.диссертация, МГУ им. М.В.Ломоносова, 1984, 157 с.
6. Гасымов Э.А. О разрешимости смешанных задач для параболических уравнений второго порядка в областях с криволинейными границами // Дифференц. уравнения, 1987, т.23, № 3, с.514-516.
7. Гасымов Э.А. Смешанные задачи на сопряжение параболических систем разных порядков с нелокальными краевыми условиями // Дифференц. уравнения, 1990, т.26, №8, с.1364-1374.
8. Гасымов Э.А. Применение интегральных преобразований к решению некоторых смешанных задач// Дифференц. уравнения, 2006, т.28, №3, с.521-522.

9. Фихтенгольц Г.М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука, 1969, т.III, 656 с.
10. Gasimov E.A. Application of finite integral transformation method to the solution of a mixed problem with integro-differential conditions for one non-standard equation // Abstracts of the third congress of the world mathematical society of Turkic countries, Almaty, June 30-July 4, 2009, v.1, p.207.
11. Gasimov E.A. Application of finite integral transformation method to the solution of a mixed problem for one non-standard equation // Modern problems of applied mathematics and information technologies – Al Khorezmiy, abstracts, Tashkent, 18-21september, 2009, p.33 .
12. Гасымов Э.А. Многомерная смешанная задача для параболических уравнений с интегро-дифференциальными условиями // Вестник БГУ, серия физ.-мат. наук, 2009, №2, с.26-32.
13. Гасымов Э.А., Абдуллаева Г.З. О задаче Коши для некоторых дифференциальных систем с частными производными // Тезисы Межд.конференции по математике и механике, посвящённой 50-летию Института Математики и Механики НАН Азербайджана, Баку, 2009, с.108-109.
14. Гасымов Э.А., Эфенди С.Н. К теории смешанных задач на сопряжение гиперболических систем разных порядков // Материалы Республиканской научной конференции, посвящённые 85-летнему юбилею Г.А.Алиева, Баку, 2008, с.39-41.

QEYRİ-MƏHDUD ZOLAQDA PARABOLİK TƏNLİKLƏR ÜÇÜN İKİÖLÇÜLÜ QARIŞIQ MƏSƏLƏNİN HƏLLİNƏ SONLU İNTEQRAL ÇEVİRMƏ METODUNUN TƏTBİQİ

E.A.QASIMOV

XÜLASƏ

İşdə sonlu inteqral çevirmə və Furye metodlarının kombinasiyasından ibarət metodu tətbiq etməklə müəyyən şərtlər daxilində qeyri-məhdud zolaqda parabolik tənlik üçün ikiölçülü qarışıq məsələnin həllinin analitik ifadəsi alınmışdır.

APPLICATION OF THE FINITE INTEGRAL TRANSFORMATION METHOD TO THE SOLUTION OF TWO-DIMENSIONAL MIXED PROBLEM FOR PARABOLIC EQUATIONS IN UNBOUNDED STRIP

E.A.GASIMOV

SUMMARY

In the present paper, applying the combined Fourier method and the finite integral transformation method to the solution of the considered mixed problem, analytic representation of the solution is obtained under apriori assumptions of its existence. Imposing certain restrictions on the problem data, it is shown that, in fact, the obtained analytic representation is a solution of the considered problem.